SOLUTIONS

Solution 1 :

$$1°/\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln x}{2x+\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x\ (\frac{x}{\ln x}-1)}{\ln x\ (\frac{2x}{\ln x}+1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{\ln x}-1}{\frac{2x}{\ln x}+1}=-1$$

$$2°/\ \lim_{x\to 0^+} x^2\ln x=\lim_{x\to 0^+} x\,(x\cdot\ln x)=0 \text{ car } \lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x=0.$$

$$3°/\ \lim_{x\to 0^+} x^n(\ln^2 x)=\lim_{x\to 0^+}(x^{\frac{n}{2}}\ln x)^2$$

On pose $X=x^{\frac{n}{2}}\Rightarrow x=X^{\frac{2}{n}}$. Lorsque $x\to 0^+$, $X\to 0^+$ d'où :

$$\lim_{x\to 0^+}(x^{\frac{n}{2}}\ln x)^2=\lim_{X\to 0^+}(X\cdot\ln X^{\frac{2}{n}})^2=\lim_{X\to 0^+}(\frac{2}{n})^2(X\cdot\ln X)^2=0$$

car $\lim\limits_{X\to 0^+} X\cdot\ln X=0$.

$$4°/\ \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ \ln x\,(\frac{x+1}{x})=\lim_{x\to 0^+}(\sqrt{x}\ \ln(x+1)-\sqrt{x}\ \ln x)$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ \ln(x+1)=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ \ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ \ln(\sqrt{x})^2=\lim\limits_{x\to 0^+}2\sqrt{x}\ \ln\sqrt{x}$

  $=\lim\limits_{x\to 0^+}2X\cdot\ln X=0$ $(X=\sqrt{x})$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ \ln(\frac{x+1}{x})=0$.

$$5°/\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\frac{\ln(1+2x)}{2x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}=\lim\limits_{X\to 0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1 \quad (X=2x)$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ d'où $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)}=2$.